

高次精度陽的時間領域有限差分法における電荷保存則についての数値誤差の抑制

#関戸 晴宇¹⁾, 梅田 隆行²⁾⁽¹⁾ 名古屋大学, ⁽²⁾ 北海道大学

Suppression of Numerical Errors in the Charge Conservation Law for Finite-Difference Time-Domain Method with Higher-Order Accuracy

#Harune Sekido¹⁾, Takayuki UMEDA²⁾⁽¹⁾Nagoya University, ⁽²⁾Hokkaido University

This study proposes a suppression of numerical errors at current sources in the Finite-Difference Time-Domain (FDTD) method with the time-development equations using higher-order differences. The FDTD method (Yee 1966) is a numerical method for solving the time development of electromagnetic fields by approximating Maxwell's equations in both time and space with the finite difference of the second-order accuracy. A staggered grid system is used in the FDTD method, in which Gauss's law is always satisfied. Owing to this advantage, the FDTD method is used for more than a half century and applied into plasma kinetic simulations. In the FDTD method, however, numerical oscillations occur due to the error between the numerical phase velocity and the theoretical phase velocity. The FDTD(2,4) method (Fang 1989; Petropoulos 1994), which uses the fourth-order spatial difference, is proposed for reduction of the numerical errors. However, the Courant condition becomes more restricted by using higher-order finite differences in space and a larger number of dimensions. Recently, numerical methods have been developed by adding odd-degree difference terms to the time-development equations of FDTD(2,4) (Sekido & Umeda EPS 2024), which relaxes the Courant condition and reduce numerical errors in phase velocity. With those methods, computational time is reduced significantly, since longer time steps can be used. However, it has been found that there arise large numerical errors in the charge conservation law with FDTD(2,4) which uses higher-order finite differences in space. The same problem occurs with the Sekido & Umeda method. The numerical errors have a negative impact in plasma kinetic simulations. In the present study, the numerical errors in the charge conservation law are suppressed. With FDTD(2,4), the numerical errors are suppressed by adding correction terms for current densities to the time-development equations. On the other hand, with Sekido & Umeda method, it is difficult to suppress the numerical errors only with adding correction terms. Therefore, the order of numerical accuracy is changed for additional difference terms as well as additional correction terms for current densities.

本研究では、時間発展式に高次精度差分を用いた FDTD (Finite-Difference Time-Domain) 法について、電流を入力として与える際に生じる数値誤差の修正を行った。FDTD 法は、電磁場の時間発展を解く数値計算手法であり、時間および空間ともに 2 次精度の差分で Maxwell 方程式を近似することで求められる (Yee 1966)。また、staggered 格子系が採用されており、電場および磁場についての Gauss の法則が常に成り立つ。この利点により FDTD 法は電磁場計算手法として 50 年以上に渡って用いられており、プラズマ運動論シミュレーションにも適用されている。FDTD 法では数値的な位相速度と理論的な光速の差に依存して数値振動が生じる。この数値振動の低減のため、4 次精度の空間差分を用いた FDTD(2,4) 法が提案されている (Fang 1989; Petropoulos 1994)。しかし、近似精度の上昇および空間の高次元化に伴って Courant 条件は厳しくなるという問題を抱えていた。そこで、Courant 条件の緩和と同時に数値誤差を低減させるために、FDTD(2,4) の時間発展式に奇数階微分項を追加する手法を開発した (Sekido & Umeda EPS 2024)。この手法では従来の陽的 FDTD 法よりも時間ステップを長くとることができるため、プラズマシミュレーションに適用することで計算時間の大幅な短縮が可能となる。しかし、時間発展式に高次精度差分を用いる FDTD(2,4) では、入力として電流を与えた際に電荷保存則において数値的な誤差が生じることが明らかとなっており、同様の数値誤差が奇数階微分項を追加した手法においても発生する。この数値誤差は静磁場の残留として出現し、プラズマシミュレーションにおいて悪影響を及ぼす。そこで本研究では、電流を入力した際に生じる電荷保存則についての数値誤差の抑制を行った。FDTD(2,4) においては、時間発展式に対して電流密度についての補正項を追加することにより数値誤差を抑制した。一方、奇数階微分項を追加した手法では補正項の追加のみでの誤差の抑制は難しかった。そのため補正項の追加と同時に、追加する微分項の差分精度の変更を行った。