

高次精度 FDTD 法における位相速度誤差の低減

#葛心雨¹⁾, 梅田 隆行²⁾, 関戸 晴宇²⁾

⁽¹⁾ 名古屋大学院工学研究科, ⁽²⁾ 北海道大学情報基盤センター

Reduction of phase velocity errors in higher-order Finite-Difference Time-Domain methods

#Xinyu GE¹⁾, Takayuki UMEDA²⁾, Harune SEKIDO²⁾

⁽¹⁾ Graduate School of Engineering, Nagoya University, ⁽²⁾ Information Initiative Center, Hokkaido University

The Finite-Difference Time-Domain (FDTD) method is a fundamental approach in numerical simulations of electromagnetic waves. High-order methods often require stricter Courant – Friedrichs – Lewy (CFL) conditions and may arise numerical errors in the charge conservation law. To enable more accurate and efficient plasma simulations with less computational costs, it is important to relax CFL conditions in higher-order FDTD methods.

The present study focuses on the reduction of numerical errors while the relaxation of the CFL conditions in high-order FDTD methods. The previous study has demonstrated that the third-degree difference operator considering Laplacian can effectively relax CFL conditions and reduce anisotropic phase velocity errors in the fourth-order FDTD (Sekido+ 2024).

To further reduce phase velocity errors and thereby suppress numerical oscillations in the present study, the same approach was applied to FDTD(2,6) as the previous study. Although the CFL conditions can be relaxed, the expected reduction in phase velocity error was not achieved in FDTD(2,6) with the third-degree difference operator. A subsequent dispersion relation analysis revealed that the sixth-order scheme is unable to simultaneously minimize phase velocity errors at both $(k_x, k_y) = (\pi, \pi)$ and $(\pi, 0)$ in the wavenumber space domain. In contrast, the previous FDTD(2,4) with the third-degree difference operator naturally minimize phase velocity errors at both $(k_x, k_y) = (\pi, \pi)$ and $(\pi, 0)$ satisfies both conditions.

To satisfy conditions that minimize phase velocity errors at both $(k_x, k_y) = (\pi, \pi)$ and $(\pi, 0)$ in the present study, we introduce additional degrees of freedom into FDTD(2,6) by adding operators of second- and/or fourth -degrees order along with third-degree considering Laplacian. Although numerical results have not yet been obtained, dispersion relation analysis suggests that the present method would may lead to improvements in both the relaxation of the CFL condition numerical stability and reduction of in phase velocity errors of current high-order FDTD schemes.

有限差分時間領域 (Finite-Difference Time-Domain, FDTD) 法は、電磁波の数値シミュレーションにおいて広く用いられている手法である。高次の FDTD 手法では、Courant – Friedrichs – Lewy (CFL) 条件が厳格になるとともに、電荷保存則に関わる数値誤差が発生する可能性がある。計算コストを抑えながら、より高精度かつ効率的なプラズマシミュレーションを実現するには、高次 FDTD 法において CFL 条件を緩和することが重要である。

本研究では、高次 FDTD 法における CFL 条件の緩和と、これに伴う数値誤差、特に位相速度誤差の低減を目的とする。先行研究においては、ラプラシアンを考慮した 3 階差分演算子の導入により、FDTD(2,4) における CFL 条件の緩和と異方的な位相速度誤差の抑制が有効であることが示されている (Sekido+ 2024)。

本研究では、さらなる位相速度誤差の低減と数値振動の抑制を目指し、同様のアプローチを FDTD(2,6) に適用した。3 階差分演算子を導入した FDTD(2,6) では CFL 条件の緩和は確認されたが、期待された位相速度誤差の低減は得られなかった。分散関係解析の結果、FDTD(2,6) は波数空間における $(k_x, k_y) = (\pi, \pi)$ および $(\pi, 0)$ の両点において、位相速度誤差を同時に最小化することが困難であることが明らかとなった。一方、3 階差分演算子を導入した FDTD(2,4) では、両条件を自然に満たすことが可能であった。

そこで本研究では、3 階差分演算子を導入した FDTD(2,6) に 2 階および 4 階の演算子を追加することで自由度を拡張し、 $(k_x, k_y) = (\pi, \pi)$ および $(\pi, 0)$ の両点における位相速度誤差の同時最小化を図る。現時点では数値計算による検証は行っていないが、分散関係解析により、本手法が現行の高次 FDTD 法における CFL 条件の緩和および位相速度誤差の低減に寄与する可能性が示唆されている。